MATRICES y DETERMINANTES. PROBLEMAS SELECCIONADOS DE SELECTIVIDAD (ANDALUCIA)

E1: Se consideran las matrices A= $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, B = (2 -1 0), C = (1 3 -1). Donde a es un número real.

a) Halle los valores del parámetro a para que la matriz A tenga inversa. **(Para $a \neq 1$ y $a \neq 3$)**

b) Para a = 2, calcule la matriz inversa de A. **A^{-1} =** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$

c) Para a = 2, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + I_3 = B^t \cdot C$ **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{-28} & \mathbf{-21} & \mathbf{19} \\ \mathbf{16} & \mathbf{12} & \mathbf{-11} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

E2: Considere la matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -a-1 \\ -1 & a & a+1 \\ 1 & -3 & -a \end{pmatrix}$ Donde a es un número real. Determine de manera justificada:

a) Los valores de a para los que la matriz A tiene inversa. **(Para $a \neq 0$ y $a \neq 4$)**

b) Las matrices A^2, A^3 y A^{2022} para a = 4. **(Todas son igual a A)**

c) La matriz X que verifica que $X \cdot A = I_3$ para a = 3. **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1/3} & \mathbf{-2/3} & \mathbf{-4/3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

E3: Se consideran las matrices A= $\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 8 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

a) Determine los valores de a para que la matriz A no sea invertible. **(Para a = 0, a = 4 y a = -4)**

b) Para a = 5, calcule la inversa de la matriz A. **A^{-1} =** $\begin{pmatrix} \mathbf{5/9} & \mathbf{-2/9} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-8/9} & \mathbf{5/9} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1/5} \end{pmatrix}$

c) Para a = 5, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B$. **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$

E4: Se consideran las matrices A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) Razone si se pueden efectuar las siguientes operaciones y realice las que sean posibles:

C · A A + B $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $C^t \cdot B^t$ **(8 6 8)**

b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B \cdot X + C$. **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{-5.5} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{-3.5} \end{pmatrix}$

E5: Se consideran las matrices: A= $\begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ D = $\begin{pmatrix} a^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

a) Resuelva la ecuación matricial $A^t - X \cdot A = 3 \cdot I_3$ **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{-6.5} & \mathbf{-36} & \mathbf{-31.5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{22} & \mathbf{20} \\ \mathbf{-5.9} & \mathbf{-31.4} & \mathbf{-26.7} \end{pmatrix}$

b) ¿Existe algún valor del parámetro a para el que se verifique $C^t \cdot D = B$? En caso afirmativo, calcule dicho valor. **(Para $a = -2$)**

E6: Se consideran las matrices A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

a) Determine la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2 \cdot C$ **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{-7/3} & \mathbf{19/3} \\ \mathbf{-13/3} & \mathbf{10/3} \\ \mathbf{10/3} & \mathbf{-13/3} \end{pmatrix}$

b) Determine las dimensiones de dos matrices P y Q sabiendo que $A \cdot P^t + C = C \cdot (Q \cdot B)$ **(Ambas 2x3)**

E7: Se considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con m un parámetro real.

a) ¿Para qué valores del parámetro m existe la matriz inversa de A? **(Para $m \neq -1$ y $m \neq 2.5$)**

b) Para m = 2, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A - A^2 = I_3$. **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{8/3} & \mathbf{0} & \mathbf{5/3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2/3} & \mathbf{0} & \mathbf{5/3} \end{pmatrix}$

E8: Se consideran las matrices A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; C = $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule A^2, A^3, A^4 y deduzca la expresión de A^n, con n un número natural.

b) Razone si existe la inversa de la matriz B.

c) Razone si la ecuación matricial B · X = C tiene solución y resuélvala en caso de que sea posible. **X** = $\begin{pmatrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{-13} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix}$

E9: Se consideran las matrices A = $\begin{pmatrix} a & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y C = $(1 \quad 2)$. a) Calcule el valor del parámetro a para que la matriz A no tenga inversa. **(a = 3)** b) Para a = 3, resuelva la ecuación matricial X·A- X·B = C. **X = (1 0)**

c) Para a = 3, compruebe que $A^2 = 11 \cdot A$ y exprese A^8 en función de la matriz A.

E10: Se considera la ecuación matricial $(10\, I_3 - A) \cdot X = B$, donde A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y B es una matriz con tres filas y una columna.

a) Razone qué dimensión ha de tener la matriz X. **(3x1)** b) ¿Tiene solución la ecuación matricial anterior para cualquier matriz B de orden 3x1? ¿Por qué? c) Resuelva dicha ecuación matricial si B = $(5 \quad 20 \quad -3)^t$. **X** = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

E11: Se considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. a) Calcule A^{40} y $(A^t)^{30}$ $\mathbf{A^{40}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-40} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\mathbf{(A^t)^{30}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-30} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

b) Calcule $(A^{-1} + A)^2$. $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ c) Resuelva la ecuación matricial $(A^t + I_2) \cdot X = A^t - I_2$ **X** = $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-0.5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

E12: Se considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$.

a) Determine para qué valores del parámetro a, la matriz A tiene inversa. **(Para $a \neq$ -8)**

b) Para a = 1, calcule la inversa de A. $\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{4/9} & \mathbf{1/9} & \mathbf{-2/9} \\ \mathbf{1/9} & \mathbf{-2/9} & \mathbf{4/9} \\ \mathbf{-2/9} & \mathbf{4/9} & \mathbf{1/9} \end{pmatrix}$

c) Para a = 1, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B^t$, siendo B = $(0 \quad 1 \quad -1)$. **X** = $\begin{pmatrix} \mathbf{1/3} \\ \mathbf{-2/3} \\ \mathbf{1/3} \end{pmatrix}$

E13: Sean A, B, X, Y matrices invertibles que verifican: A·X = B y B·Y = A.

a) Compruebe que $Y^{-1} = X$. b) Para A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle X e Y. **X** = $\begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$, **Y** = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5/2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$

E14: Se consideran las matrices A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Determine para qué valores de a tiene inversa la matriz A. **(Para $a \neq 1$ y $a \neq -3$)**
b) Para a = 2, calcule la matriz inversa de A. $\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.4} & \mathbf{0.4} & \mathbf{-0.2} \\ \mathbf{0.5} & \mathbf{-0.5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0.3} & \mathbf{0.3} & \mathbf{-0.4} \end{pmatrix}$
c) Para a = 0, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A^{-1} - B \cdot B^t = I_3$ **X** = $\begin{pmatrix} \mathbf{15} & \mathbf{1} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{10} & \mathbf{-3} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{24} & \mathbf{1} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$

E15: Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viaje, que les dan el precio por noche según tipo de habitación, individual, doble y triple.
La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros.
La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros. El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples, el segundo dos individuales, doce dobles y cinco triples y el tercer instituto una individual, dieciséis dobles y siete triples.

a) Exprese, mediante una matriz A, los precios de las dos agencias según el tipo de habitación y con otra matriz D la demanda de los tres institutos.
b) Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesa a cada instituto?
c) ¿Existe inversa de la matriz D? ¿ Y de la matriz A? Justifique las respuestas.

E16: Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = A\cdot A^t$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, siendo a un parámetro real.

a) ¿Para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz B? **(Para cualquier valor de a)**

b) Para $a = 1$, calcule la inversa de la matriz B. $\mathbf{B^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2/9} & \mathbf{-1/9} \\ \mathbf{-1/9} & \mathbf{5/9} \end{pmatrix}$

c) Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $B^t \cdot X + 9C = O$ $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

E17: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 3 & 5 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores del parámetro m tiene inversa de la matriz A? **(Para $m \neq -1$ y $m \neq 4$)**

b) Para $m = 0$, resuelva la ecuación matricial $X\cdot A = A\cdot A^t$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1/2} & \mathbf{5} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{13/4} & \mathbf{-9/2} & \mathbf{5/2} \\ \mathbf{31/2} & \mathbf{-31} & \mathbf{13} \end{pmatrix}$

E18: Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Razone si la matriz A es simétrica.

b) Calcule A^{-1}. $\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

c) Resuelva la ecuación matricial $2X\cdot A - A^2 - 3\cdot I_3 = 0$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{-4} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-1/2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{7/2} \end{pmatrix}$

E19: Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Justifique cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúelas cuando sea posible:

$A + B\cdot C$ $\quad$ $A\cdot C + B\cdot D^t$ $\begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{-9} \end{pmatrix}$ $\quad$ $B^2 + C\cdot D$ $\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-10} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$ $\quad$ $A + D\cdot C$

b) Resuelva la ecuación matricial $X\cdot(A + I_2) = 3B^t$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-12} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{18} & \mathbf{12} \end{pmatrix}$

E20: Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

a) ¿Tiene inversa la matriz $A\cdot B - C$? Justifique la respuesta y, en caso afirmativo, calcule $(A\cdot B - C)^{-1}$ $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-3/2} \end{pmatrix}$

b) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot B\cdot X - C\cdot X = C^t$ $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{1/2} \end{pmatrix}$

E21: Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$

a) Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1) $A\cdot A^t$ es una matriz simétrica. **(Es cierta)**

2) $A\cdot A^t + B$ posee inversa. **(No es cierta)**

b) Resuelva la ecuación matricial $B\cdot X + A = C$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{-8} \end{pmatrix}$

E22: Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 5 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Resuelva la ecuación matricial $A^4\cdot X = B^2 + I_2$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

b) ¿Tiene inversa la matriz C? Justifique la respuesta. **(No tiene inversa)**

E23: Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Justifique que la matriz A tiene inversa y calcule A^{-1} $\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/4} & \mathbf{1/6} & \mathbf{7/12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/3} & \mathbf{-1/3} \\ \mathbf{1/4} & \mathbf{-1/6} & \mathbf{-1/12} \end{pmatrix}$

b) Calcule, si existe, la matriz X que satisface la ecuación matricial $A\cdot X = B$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

E24: Consideremos la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & m^2+m \end{pmatrix}$, con m un parámetro real. Se pide:

a) ¿Para qué valores del parámetro m existe la matriz inversa de A? **(Para $m \neq$ -2 y $m \neq 1$)**

b) Para m = 0, calcule la matriz inversa de A. **A^{-1} =** $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1/2} \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{-1/2} \end{pmatrix}$

c) Para m = 0 en la matriz A, resuelva la ecuación matricial X·A = 2C, siendo C = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

E25: Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & m \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcule su determinante y el valor o valores del parámetro m para los que existe la inversa de la matriz A.
(det A = $-2m^2-2m+4$; Para $m \neq -2$ y $m \neq 1$)

b) Para m = -1, calcule A^{-1}. **A^{-1} =** $\begin{pmatrix} \mathbf{-1/2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1/2} \\ \mathbf{3/4} & \mathbf{1/2} & \mathbf{1/4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

c) Resuelva la ecuación matricial A·X = A + I_3. **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1/2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1/2} \\ \mathbf{3/4} & \mathbf{3/2} & \mathbf{1/4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

E26: Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Obtenga los valores de m y n para que A coincida con su traspuesta y no tenga inversa. **(Para m = -1 y n = 5)**

b) Para m = 0 y n = 3, obtenga A^{-1}. **A^{-1} =** $\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

c) Para m = 0 y n = 3, resuelva la ecuación matricial X·A + $2I_3$ = A^2. **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{-9} & \mathbf{-7} & \mathbf{9} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{7} & \mathbf{5} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$

E27: Se consideran las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ m & 3 \end{pmatrix}$

a) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones matriciales: $\begin{cases} 3X + 2Y = A \\ -4X + Y = B \end{cases}$ **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ **Y =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

b) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz C? **(Para $m \neq 2$)**

c) Para m = 1, calcule la matriz inversa de C. **C^{-1} =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1/2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1/6} & \mathbf{2/3} \end{pmatrix}$

E28: Se consideran las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) ¿Se verifica la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2\,A\cdot B$? **(No se verifica)**

b) Resuelva la ecuación matricial X·A = $2B^t + I_2$. **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{-5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-5/2} & \mathbf{-1/2} \end{pmatrix}$

E29: Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ y C = (-2 -2)

a) Justifique cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúelas cuando sea posible:

B + 2C·A; A- $(B\cdot C)^t$ $\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{12} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{16} \end{pmatrix}$

b) Resuelva la ecuación matricial: (1/5)(B + A·X) = C^t. **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{-7/2} \end{pmatrix}$

E30: Se consideran las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Razone qué dimensiones deben tener las matrices P y Q para que los productos ($A\cdot P\cdot B^t$) y (Q·A·C) den como resultado una matriz cuadrada. **(P:2x3; Q: 3x2)**

b) Resuelva la ecuación matricial A·X - $2B\cdot C^t = A^2$ **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{-31} & \mathbf{-26} \\ \mathbf{-20} & \mathbf{-15} \end{pmatrix}$

E31: Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule $A^{2018} + A^{2019}$ $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ b) Resuelva la ecuación matricial X·A + $B\cdot B^t$ = 2A **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-7} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

E32: a) Resuelva la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{23/13} \\ \mathbf{2/13} \end{pmatrix}$
b) Si A es una matriz con tres filas y dos columnas, determine razonadamente la dimensión que deben tener las matrices B, C y D para que se puedan efectuar las siguientes operaciones:
$2A - 3B$; $A \cdot A^t - C^2$; $A \cdot D$ **(B: 3x2; C: 3x3; D: 2xn)**

E33: a) Resuelva el sistema de ecuaciones: $2A - 5B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$; $3A - B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ **A =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ **B =** $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$
b) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot C - D^2 = I_2$ **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{-2/5} & \mathbf{6/5} \\ \mathbf{-6/5} & \mathbf{8/5} \end{pmatrix}$

E34: Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) ¿Es invertible la matriz $B + 2I_2$? Justifique la respuesta y, en caso afirmativo, calcule $(B + 2I_2)^{-1}$. $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1/3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/3} \end{pmatrix}$
b) Resuelva la ecuación matricial $A^2 + X \cdot B + 2X = 3B^t$. **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{-8/3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{7/3} \end{pmatrix}$

E35: Se considera la ecuación matricial $A \cdot X = A^t \cdot B$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
a) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz X? **(3x1)** b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = A^t \cdot B$. **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{-29} \\ \mathbf{14} \\ \mathbf{-4} \end{pmatrix}$

E36: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
a) Justifique cuáles de las siguientes operaciones pueden realizarse y, en tal caso, calcule el resultado:
A^2 $\quad A - B$ $\quad A \cdot B$ $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\quad A \cdot B^t$
b) Halle la matriz X tal que $A^t + B \cdot X = 3B$. **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

E37: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Calcule $A^2 + B^3$. $\begin{pmatrix} \mathbf{-19} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$ b) Calcule X en la ecuación matricial $(A + B) \cdot X = A - B$. **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3/2} & \mathbf{1/2} \end{pmatrix}$

E38: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
a) Razone cuáles de las siguientes operaciones son posibles: $A \cdot B^t$ $\quad B + 3C$ $\quad C \cdot B^t$ $\quad A \cdot B + C$
b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = C$. **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

E39: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
a) Calcule la matriz A^{2017}. **(= A)** b) ¿Se verifica la expresión $(B + A) \cdot (B - A) = B^2 - A^2$? **(No se verifica)**

E40: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
a) Razone si se pueden efectuar las siguientes operaciones: $A \cdot D + B \cdot C$ $\quad D^t \cdot B - A^2$ **(Ninguna de las dos)**
b) Halle la matriz X que verifica la ecuación matricial $A \cdot X = B - C$. **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

E41: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
a) Resuelva la ecuación matricial $A^2 \cdot X + C = 2B$. **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{59} & \mathbf{-19} & \mathbf{58} \\ \mathbf{-16} & \mathbf{5} & \mathbf{-16} \end{pmatrix}$
b) ¿Qué dimensiones deben tener las matrices P y Q para que las matrices $(B + C) \cdot P$ y $B \cdot Q \cdot C^t$ sean cuadradas?

E42: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Resuelva la ecuación matricial $X \cdot (B \cdot B^t) = (1/2) \cdot A - 2A^t$. **X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{-7/3} & \mathbf{5/3} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$
b) Razone cuáles de las siguientes operaciones pueden realizarse e indique, en su caso, la dimensión de la matriz resultante: $A \cdot B$, $A \cdot B^t$, $B \cdot A^{-1}$, $B^t \cdot A + A^{-1}$

E43: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Calcule A^2 y A^{2016}. **($= I_2$)** b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X - B = C^t$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

E44: a) Si A es una matriz de dimensión mxn, indique la dimensión de una matriz X si se verifica que $(A^t \cdot A) \cdot X = I_n$

b) Calcule dicha matriz X en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{3/8} & \mathbf{-1/8} \\ \mathbf{-1/8} & \mathbf{3/8} \end{pmatrix}$

c) Calcule, si es posible, el producto $A \cdot (A^t \cdot A)$. $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

E45: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

a) Resuelva la ecuación matricial $C \cdot B \cdot X - 2A \cdot X = A^t$ $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{3/2} & \mathbf{-3/2} \\ \mathbf{5/6} & \mathbf{-1/2} \end{pmatrix}$

b) Analice cuáles de las siguientes operaciones, sin efectuarse, se pueden realizar y justifique las respuestas:
$B \cdot C + 2A$ **(No)**, $A \cdot C + C$ **(Sí)**, $B^t \cdot C$ **(No)**, $C \cdot B - A$ **(Sí)**

E46: Las filas de la matriz P indican los respectivos precios de tres artículos A_1, A_2 y A_3 en dos comercios, C_1 (fila 1) y C_2 (fila 2): $P = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 \\ 23 & 35 & 17 \end{pmatrix}$

Cati desea comprar 2 unidades del artículo A_1, 1 de A_2 y 3 de A_3

Manuel desea comprar 5 unidades del artículo A_1, 1 de A_2 y 1 de A_3

Han dispuesto esas compras en la matriz Q: $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule $P \cdot Q^t$ y $Q \cdot P^t$ e indique el significado de los elementos de las matrices resultantes.

b) A la vista de lo obtenido en el apartado anterior, ¿dónde les interesa hacer la compra a cada uno?

E47: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Efectúe la operación $A \cdot B^t$. $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{13} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$ b) Determine la matriz X tal que $A + 2 \cdot X = B$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/2} & \mathbf{-3/2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

c) Halle la matriz Y tal que $B \cdot Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$. $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{3/2} \end{pmatrix}$

E48: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = (2 \;\; 1)$, $D = (1 \;\; -1 \;\; 2)$.

a) Estudie cuáles de los siguientes productos de matrices se pueden realizar, indicando las dimensiones de la matriz resultante: $A \cdot B^t$ $C^t \cdot D$ $B^t \cdot D$ $D \cdot B^t$.

b) Despeje la matriz X en la ecuación $X \cdot A^{-1} + 2B = 3C^t \cdot D$, sin calcular sus elementos. $\mathbf{X = (3C^t \cdot D - 2B) \cdot A}$

c) Calcule la matriz $A \cdot (B^t - 2D^t \cdot C)$. $\begin{pmatrix} \mathbf{-23} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{13} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-17} & \mathbf{-9} \end{pmatrix}$

E49: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcule las matrices X e Y si $X + Y = 2A$ y $X + B = 2Y$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

b) Analice cuáles de las siguientes operaciones con matrices se pueden realizar, indicando en los casos afirmativos las dimensiones de la matriz D: $A + D = C$; $A \cdot D = C^t$ **(2x3)**; $D \cdot A = C$ **(3x2)**; $D \cdot A = C^t$

E50: Sean las matrices $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -1 \\ -9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$,

a) Determine la dimensión que debe tener una matriz A para que se verifique la igualdad $A \cdot B = 2C^t$.

b) Halle la matriz A anterior, sabiendo que de ella se conocen los elementos $a_{31} = 2$, $a_{12} = -3$ y $a_{22} = 1$. $\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

E51: a) Determine los valores de x e y que hacen cierta la igualdad: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(x = 6/7; y = 9/7)**

b) Resuelva la ecuación matricial: $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-7} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

E52: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera.

a) Obtenga la matriz A^{2014}. $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2014a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ b) Para a = 2, resuelva la ecuación matricial $A^3 \cdot X - 4B = O$ $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-16} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

E53: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = (-1 \quad 1)$.

a) Calcule el valor del parámetro a para que se verifique $(B \cdot A)^t = A \cdot B^t$ **(a = 0)**

b) Para a = 2 , resuelva la ecuación matricial $X \cdot A = B$ **X = (-1 3)**

E54: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^3. $\begin{pmatrix} \mathbf{89} & \mathbf{144} \\ \mathbf{144} & \mathbf{233} \end{pmatrix}$ b) Determine la matriz X para que $A \cdot X + B \cdot C = D$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-11} \\ \mathbf{6} \end{pmatrix}$

E55: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule las matrices X e Y para las que se verifica: X + Y = A y 3X + Y = B. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{7/2} \\ \mathbf{-7/2} & \mathbf{3/2} \end{pmatrix}$ $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-21/2} \\ \mathbf{11/2} & \mathbf{-5/2} \end{pmatrix}$

b) Halle la matriz Z que verifica $B \cdot Z + B^t = 2I_2$ $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{5/2} & \mathbf{25/2} \end{pmatrix}$

E56: Sean las matrices $A = (1 \quad -2 \quad 3)$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Resuelva, si es posible, la ecuación matricial $B \cdot A + 2X = C$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-7/2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1/2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5/2} & \mathbf{-1/2} \end{pmatrix}$

E57: a) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Determine la matriz X tal que $B \cdot X = 3A + A^t$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-8} \end{pmatrix}$

b) Calcule la matriz Y que verifica $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$

E58: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2 y A^{2013}. **($\mathbf{A^2 = I_2}$; $\mathbf{A^{2013} = A}$)** b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + I_2 = 5B^t - A^2$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{15} \end{pmatrix}$

E59: Una fábrica produce dos tipos de productos, A y B, que distribuye a tres clientes.
En el mes de enero el primer cliente compró 9 unidades de A y 5 de B, el segundo cliente 3 de A y 7 de B, y el tercer cliente 4 de A y 6 de B. En el mes de febrero el primer cliente y el segundo duplicaron las compras del mes anterior, y el tercer cliente compró de cada producto una unidad más de las que compró en enero. En marzo el primer cliente no compró nada, y el segundo y el tercero compraron lo mismo que en febrero.

a) Para cada mes construya la matriz de dimensión 3x2 correspondiente a las compras de ese mes.

$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$, $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{18} & \mathbf{10} \\ \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ \mathbf{5} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$, $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ \mathbf{5} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

b) Calcule la matriz de compras del trimestre. $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{27} & \mathbf{15} \\ \mathbf{15} & \mathbf{35} \\ \mathbf{14} & \mathbf{20} \end{pmatrix}$

c) Si los precios de los productos A y B son, respectivamente, 80 y 100 euros, calcule lo que factura la fábrica en el primer trimestre, por cada cliente y en total. $\mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{80} \\ \mathbf{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3660} \\ \mathbf{4700} \\ \mathbf{3120} \end{pmatrix}$ **Total= 11480 euros**

E60: Sean las matrices A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Obtenga a y b sabiendo que $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es A simétrica? **(a = -1, b = 0; es simétrica)**

b) Para los valores a = 3 y b = 1 calcule la matriz X tal que $A \cdot B = 2(X - 3I_2)$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{9/2} \end{pmatrix}$

E61: Sean las matrices A= $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 3 & -1 & b \end{pmatrix}$.

a) Halle los valores de *a* y *b* para que se verifique $B \cdot C^t = A$. **(*a* = 3, *b* = -1)**

b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X - A^2 = I_2$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1/2} & \mathbf{-21/4} \\ \mathbf{7/4} & \mathbf{31/8} \end{pmatrix}$

E62: Los alumnos de 2º de Bachillerato organizan una venta de pasteles para el viaje de fin de curso. Venden pasteles grandes, que necesitan 2 huevos, 5 terrones de azúcar y 100 g de harina cada uno, y pasteles pequeños, que necesitan 1 huevo, 3 terrones de azúcar y 80 g de harina cada uno.

a) Presente en una matriz *M*, de dimensión 3x2, las cantidades de los elementos necesarios para la elaboración de un pastel grande y uno pequeño.

b) Si desean fabricar 20 pasteles de una clase y 30 de otra, escriba las dos matrices columna, *A* (20 grandes y 30 pequeños) y *B* (30 grandes y 20 pequeños) que representan este reparto.

c) Calcule los productos M·A y M·B e indique si con 8 docenas de huevos, 200 terrones de azúcar y 5 kg de harina se pueden elaborar 20 pasteles grandes y 30 pequeños. ¿Y 30 grandes y 20 pequeños?

E63: Halle la matriz X que verifique la ecuación matricial $A^2 \cdot X = A - B \cdot C$, siendo A, B y C las matrices

A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{1/4} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1/4} \end{pmatrix}$

E64: a) Dadas las matrices M = $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $N^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, razone cuáles de las siguientes operaciones tienen sentido y efectúe las que puedan realizarse: $M + N^t$ $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$, $M^t \cdot N$, $M \cdot N$ $\begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{15} \end{pmatrix}$

b) Un industrial cafetero produce dos tipos de café, natural y descafeinado, en tres modalidades cada uno, A, B y C. Se han anotado en la matriz P los pesos, en kg, del café que el industrial produce de cada una de las modalidades de cada tipo, y en la matriz Q los precios a los que vende el kg de cada producto final:

$$P: \begin{array}{c} \\ natural \\ descafein. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 550 & 400 & 240 \\ 260 & 200 & 100 \end{pmatrix} \end{array} \qquad Q: \begin{array}{c} \\ natural \\ descafein. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2.20 & 2.75 & 2.50 \\ 3.20 & 3.90 & 3.60 \end{pmatrix} \end{array}$$

Efectúe el producto $P \cdot Q^t$ y explique el significado económico de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante. $\begin{pmatrix} \mathbf{2910} & \mathbf{4184} \\ \mathbf{1372} & \mathbf{1972} \end{pmatrix}$

E65: a) De una matriz cuadrada, *A*, de orden 3 se conocen los siguientes elementos $a_{12} = a_{21} = -2$, $a_{13} = a_{31} = 0$, $a_{23} = a_{32} = 1$. Determine los demás elementos de la matriz A sabiendo que debe cumplirse la ecuación $A \cdot B = C^t$, donde $B^t = (1 \ \ -1 \ \ 1)$ y $C = (-4 \ \ 2 \ \ -1)$. **($a_{11} = -6$, $a_{22} = -3$, $a_{33} = 0$)**

b) Calcule $2D^2$, siendo D = $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$. $\mathbf{2D^2} = \begin{pmatrix} \mathbf{-28} & \mathbf{40} \\ \mathbf{-24} & \mathbf{20} \end{pmatrix}$

E66: Sean las matrices A= $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $A^2 - B \cdot C^t$. $\begin{pmatrix} \mathbf{-8} & \mathbf{7} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$ b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + B = 2 \cdot C$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-30} & \mathbf{-13} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-13} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}$

E67: Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Efectúe, si es posible, los siguientes productos: $A \cdot A^t$ $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$; $A^t \cdot A$ $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$; $A \cdot B$

b) Resuelva la siguiente ecuación matricial $A \cdot A^t \cdot X = B$. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$